LISTA DE EXERCÍCIOS 1

Monitora: Gabriela Dalpiaz Kobren

EXERCÍCIO 1.7

Encontre o domínio (máximo) da função vetorial $\overrightarrow{r(t)} = (\sqrt{16-t}, \sqrt{t-2})$. Essa função vetorial é contínua? Caso seja, utilize o código acima para plotar a curva plana definida por $\overrightarrow{r(t)}$.

SOLUÇÃO:

Domínio:

Para encontrar o domínio, devemos analisar cada uma das funções componentes:

- $f(t) = \sqrt{16-t} \Rightarrow\ 16 - t \geq 0\ \rightarrow\ t \leq 16$
- $g(t) = \sqrt{t-2} \Rightarrow\ t - 2 \geq 0\ \rightarrow\ t \geq 2$

Logo, a união dos domínios das duas funções componentes é o domínio máximo da função vetorial $\overrightarrow{r(t)}$: $D = [2,16]$

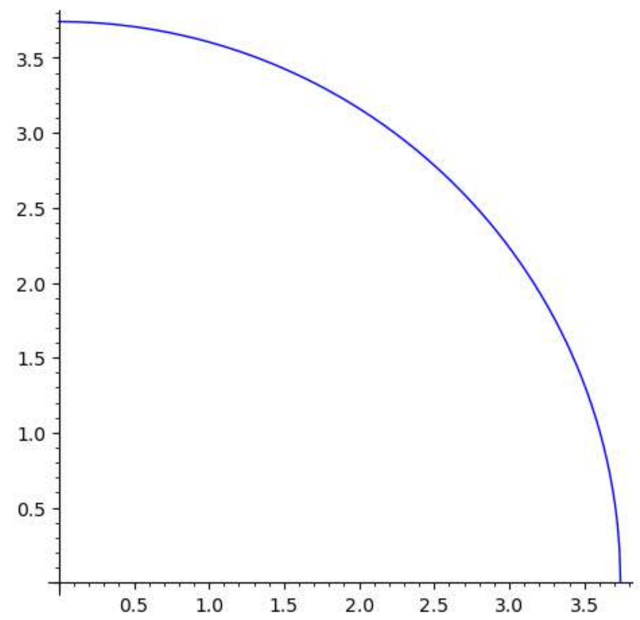
Continuidade:

A função vetorial será contínua em seu domínio se, e somente se, todas as suas funções componentes forem contínuas nesse domínio. Como ambas f(t) e g(t) são contínuas no domínio D, então a função vetorial $\overrightarrow{r(t)}$ também é contínua.

Código:
```
t = var('t');

r(t)=(sqrt(16-t), sqrt(t-2));

parametric_plot(r(t), (t,2,16))
```



EXERCÍCIO 1.8

Sejam P = (−1,0) e Q = (0,1). Altere o código acima para plotar as seguintes funções vetoriais no domínio determinado:

$$a.\ \overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)t, com\ t \in [0,4]$$

$$b.\ \overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)t^2, com\ t \in [0,2]$$

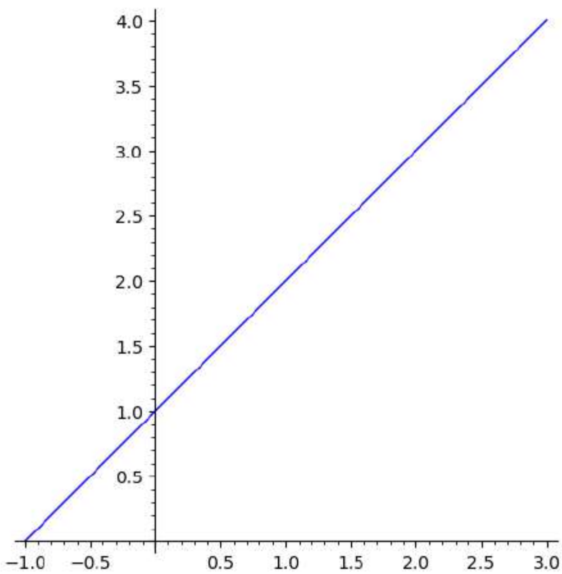
$$c.\ \overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)4\sin(t), com\ t \in [0,\pi]$$

SOLUÇÃO:

a. $\overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)t \ \rightarrow (-1{,}0) + [(0{,}1) - (-1{,}0)]t \ \rightarrow (-1{,}0) + (1{,}1)t$

$$\overrightarrow{r(t)} = (-1 + t, t), com\ t \in [0,4]$$

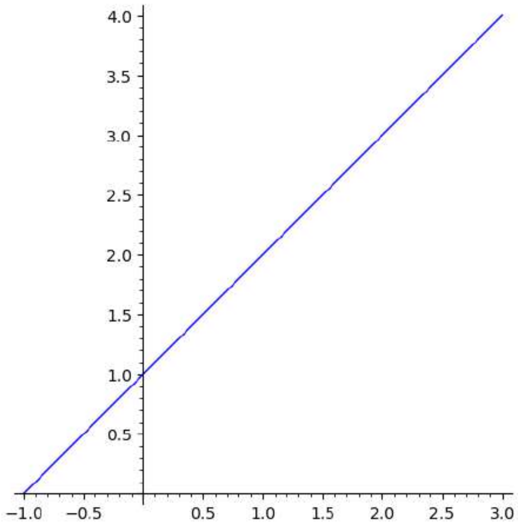
Código:
```
t = var('t');
r(t)=(t-1, t);
parametric_plot(r(t), (t,0,4))
```



b. $\overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)t^2 \ \rightarrow \ (-1{,}0) + [(0{,}1) - (-1{,}0)]t^2 \ \rightarrow (-1{,}0) + (1{,}1)t^2$

$$\overrightarrow{r(t)} = (-1 + t^2, t^2), com\ t \in [0,2]$$

Código:
```
t = var('t');
r(t)=(t^2-1, t^2);
parametric_plot(r(t), (t,0,2))
```



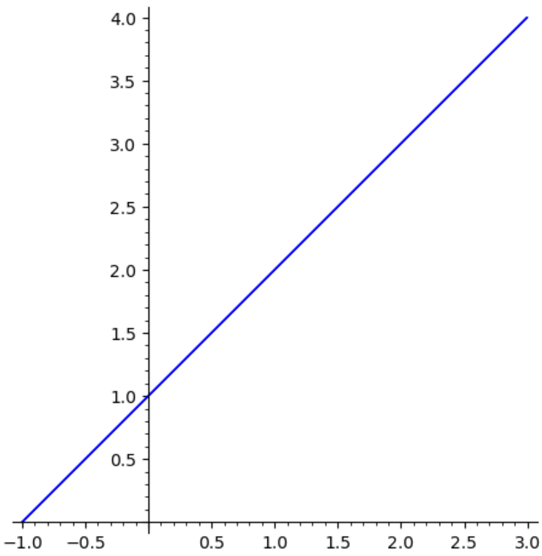
c. $\overrightarrow{r(t)} = P + (Q - P)t^2 \rightarrow (-1{,}0) + [(0{,}1) - (-1{,}0)]4\sin(t) \rightarrow (-1{,}0) + (1{,}1)4\sin(t)$

$$\overrightarrow{r(t)} = (-1 + 4\sin(t), 4\sin(t)), com\ t \in [0, \pi]$$

Código: t = var('t');

r(t)=(4*sin(t)-1, 4*sin(t));

parametric_plot(r(t), (t,0,pi))



EXERCÍCIO 1.10

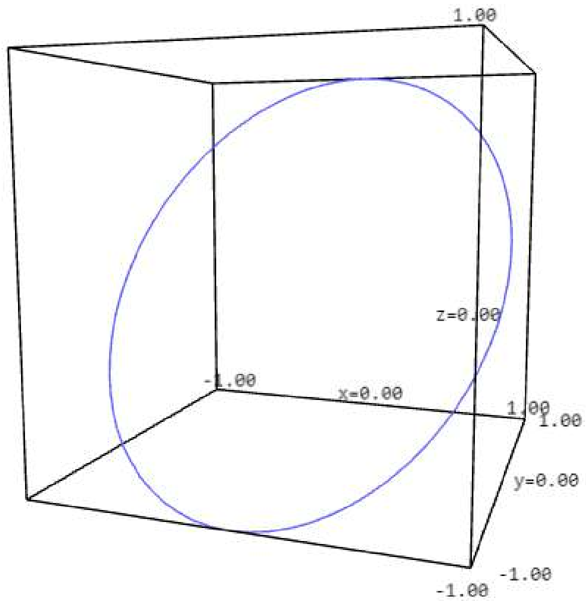
Altere o código acima para plotar as seguintes funções vetoriais no domínio determinado:

$$a.\ \overrightarrow{r(t)} = (\sin(t), \cos(t), \cos(t)), com\ t \in [0{,}2\pi]$$

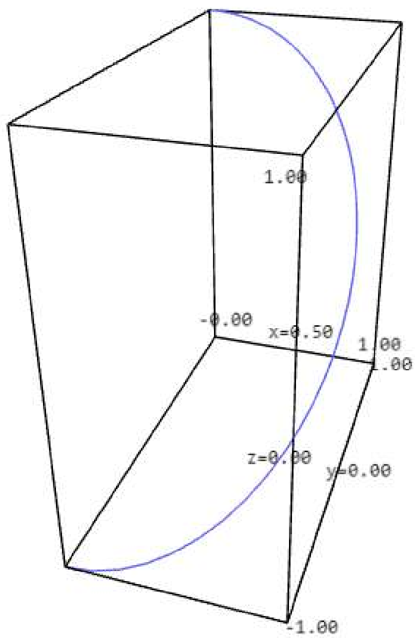
$$b.\ \overrightarrow{r(t)} = (\sin(t^3), \cos(t^3), \cos(t^3)), com\ t \in [0{,}1.465]$$

SOLUÇÃO:

a. Código: t = var('t');
r(t)=(sin(t), cos(t), cos(t));
parametric_plot3d(r(t), (t,0,2*pi))



b. Código: t = var('t');
r(t)=(sin(t^3), cos(t^3), cos(t^3));
parametric_plot3d(r(t), (t,0,1.465))



EXERCÍCIO 1.13

Encontre uma parametrização para a curva espacial obtida na interseção do plano $x - 3y = 0$ com a folha superior do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ e utilize o código acima para plotar as duas superfícies e a curva na interseção delas.

SOLUÇÃO:

$$x = 3y$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1$$

Definindo que $y = t$:

$$x = 3y = 3t$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} = \sqrt{(3t)^2 + t^2 + 1} = \sqrt{10t^2 + 1}$$

Logo uma parametrização para a curva espacial obtida na interseção do plano com a folha superior do hiperboloide é:

$$\overrightarrow{r(t)} = (3t, \mathrm{t}, \sqrt{10t^2 + 1})$$

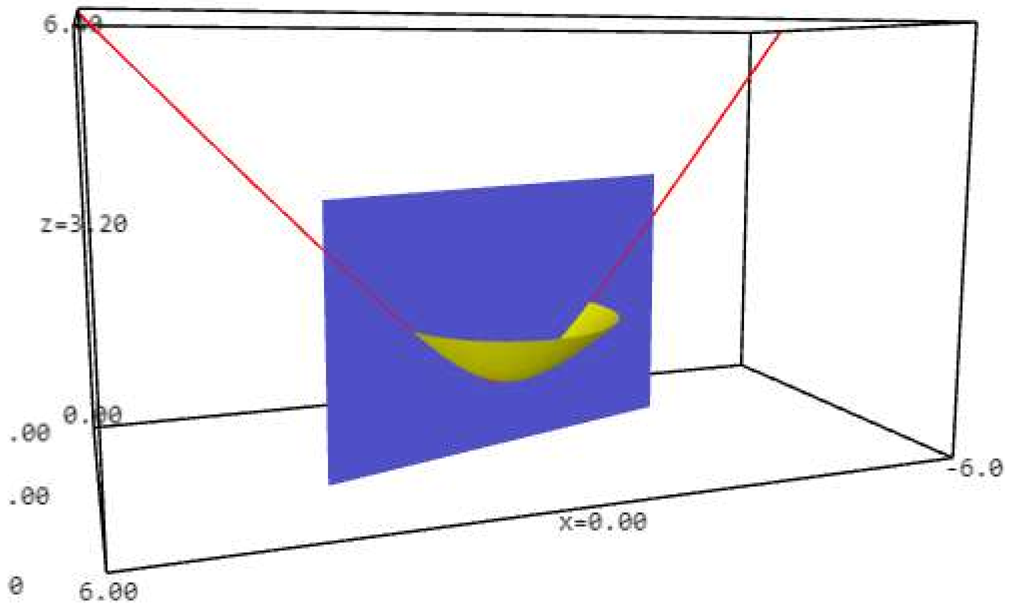
Código: var('x y z t');

```
A=implicit_plot3d(x-3*y==0, (x,-3,3), (y,-2,2), (z,0,4))+implicit_plot3d(x^2+y^2-z^2==-1, (x,-3,3), (y,-3,3), (z,0,2),color='yellow')

B=parametric_plot3d((3*t,t,sqrt(10*t^2+1)), (t,-2,2),color='red',thickness= 100)

print(A+B)

A+B
```



EXERCÍCIO 2.6

Para cada uma das funções vetoriais, calcule $\vec{r}'(t)$ e utilize o código abaixo para plotar a curva, seu vetor tangente e sua reta tangente no ponto t_0 dado:

$$a.\ \overrightarrow{r(t)} = (\sin(t)\,, 2\cos(t)), com\ t \in [0,2\pi], t_0 = {}^{\pi}/_{4}$$

$$b.\ \overrightarrow{r(t)} = (e^{t}, e^{-t}), com\ t \in [0,1.5], t_0 = 1$$

$$c.\ \overrightarrow{r(t)} = (tcos(t), 3t\sin(t)), com\ t \in [0,3], t_0 = 1$$

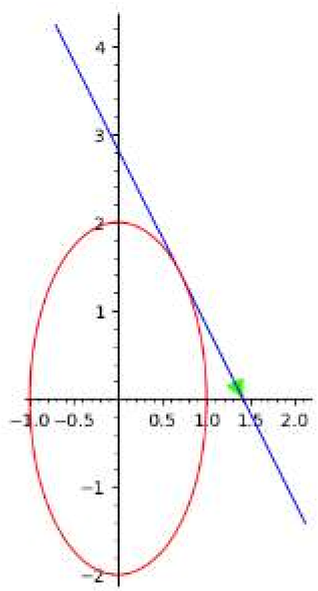
SOLUÇÃO:

a. $\vec{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}\sin(t)\,, \frac{d}{dt}2\cos(t)\right) \rightarrow \vec{r}'(t) = (\cos(t)\,, -2\sin(t)) \Rightarrow Vetor\ tangente$

$$\vec{r}'({}^{\pi}/_{4}) = (\cos({}^{\pi}/_{4})\,, -2\sin({}^{\pi}/_{4})) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) \Rightarrow Vetor\ tangente\ no\ ponto$$

$$Reta\ tangente: \overrightarrow{s(u)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) + u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

Código:
```
var('t');
r(t)=(sin(t), 2*cos(t));
r1(t)=(cos(t),-2*sin(t));
t0=pi/4
P2=line([r(t0)-2*r1(t0),r(t0)+2*r1(t0)])#reta tangente
P1=arrow(r(t0), r(t0)+r1(t0),color=hue(0.3),width=0.5) #vetor tangente
S = parametric_plot(r(t), (t,0,2*pi),color='red')
print(P1+P2+S)
P1+P2+S
```

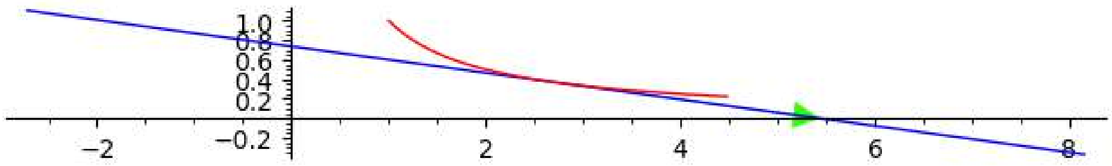


b. $\vec{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}e^t, \frac{d}{dt}e^{-t}\right) \rightarrow \vec{r}'(t) = (e^t, -e^{-t}) \Rightarrow Vetor\ tangente$

$$\vec{r}'(1) = (e^1, -e^{-1}) \Rightarrow Vetor\ tangente\ no\ ponto$$

$$Reta\ tangente: \overrightarrow{s(u)} = (\,e, e^{-1}) + u(e, -e^{-1})$$

```
Código: var('t');
r(t)=(e^t,e^-t);
r1(t)=(e^t,-e^-t);
t0=1
P2=line([r(t0)-2*r1(t0),r(t0)+2*r1(t0)])#reta tangente
P1=arrow(r(t0), r(t0)+r1(t0),color=hue(0.3),width=0.5) #vetor tangente
S = parametric_plot(r(t), (t,0,1.5),color='red')
print(P1+P2+S)
P1+P2+S
```



c. $\vec{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}t \cdot \cos(t), \frac{d}{dt}3t \cdot \sin\,(t)\right) \rightarrow \vec{r}'(t) = (\cos(t) - tsin(t), 3(\sin(t) + tcos(t)))$

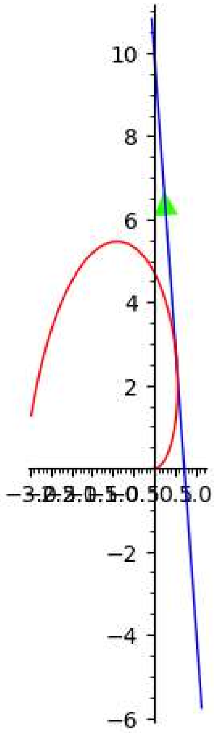
$$\Rightarrow Vetor\ Tangente$$

$$\vec{r}'(1) = (\cos(t) - tsin(t), 3(\sin(t) + tcos(t))) = (\cos(1) - \sin(1)\,, 3(\sin(1) + \cos(1)))$$

$$\Rightarrow Vetor\ Tangente\ no\ ponto$$

$$Reta\ tangente: \overrightarrow{s(u)} = (\cos(1)\,, 3\sin\,(1)) + u(\cos(1) - \sin(1)\,, 3(\sin(1) + \cos(1)))$$

```
Código: var('t');
r(t)=(t*cos(t),3*t*sin(t));
r1(t)=(cos(t)-t*sin(t),3*(sin(t)+t*cos(t)));
t0=1
P2=line([r(t0)-2*r1(t0),r(t0)+2*r1(t0)])#reta tangente
P1=arrow(r(t0), r(t0)+r1(t0),color=hue(0.3),width=0.5) #vetor tangente
S = parametric_plot(r(t), (t,0,3),color='red')
print(P1+P2+S)
P1+P2+S
```



EXERCÍCIO 2.10

Qual a curva parametrizada pela função vetorial $\overrightarrow{r(t)} = (\mathrm{t}, \sin(t)), com\ t \in \mathbb{R}$? Para cada uma das funções $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, calcule $\vec{r}(f(t))$, $\|\vec{r}'(f(t))\|$ e explique, como cada função altera o modo com que a curva é percorrida:

$$a. f(t) = 5t$$

$$b. f(t) = t^3$$

$$c. f(t) = -t$$

SOLUÇÃO:

A curva parametrizada pela função vetorial $\overrightarrow{r(t)} = (\mathrm{t}, \sin(t)), com\ t \in \mathbb{R}$, representa a curva $y = \sin{(x)}$.

$$a)\ \ \vec{r}(5t) = (5t, \sin(5t))$$

$$\vec{r}'(f(t)) = (5, 5\cos(5t))$$

$$\|\vec{r}'(5t)\| = \sqrt{5^2 + (5\cos(5t))^2} = \sqrt{25 + 25\cos^2{(5t)}}$$

$$b)\ \ \vec{r}(t^3) = (t^3, \sin(t^3))$$

$$\vec{r}'(f(t)) = (3t^2, 3t^2\cos(t^3))$$

$$\|\vec{r}'(t^3)\| = \sqrt{(3t^2)^2 + (3t^2\cos(t^3))^2} = \sqrt{9t^4 + 9t^4\cos^2{(t^3)}} = \sqrt{9t^4(1 + \cos^2(t^3))}$$

$$c)\ \vec{r}(-t) = (-t, \sin(-t))$$

$$\vec{r}'(f(t)) = (-1, -\cos(-t))$$

$$\|\vec{r}'(5t)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\cos(-t))^2} = \sqrt{1 + \cos^2(-t)} = \sqrt{1 + \cos^2(t)}$$

Explicação: As funções alteram a velocidade com que as curvas são percorridas. Na letra A, a curva é percorrida com uma velocidade 5 vezes maior. Já na letra B, ela é percorrida mais lentamente próxima do zero, mas depois aumenta rapidamente de velocidade. Por fim, na letra C, a função -t faz com que a curva seja percorrida no sentido contrário.